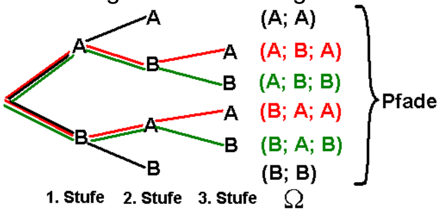
Besteht ein zufälliger Vorgang aus mehreren, nacheinander ablaufenden Teilvorgängen, so spricht man von einem **mehrstufigen Zufallsexperiment**, bei k Teilvorgängen von einem **k-stufigen Zufallsexperiment.**

Bsp. 1) **A**xel und **B**ernd spielen gegeneinander. Sieger ist derjenige, der zuerst 2 Spiele gewonnen hat.

Baumdiagramm Ergebnisse → $\Omega = \{ (A;A), (A;B;A), (A;B;B), (B;A;A), (B;A;B), (B;B) \}$



Ereignis S_A - A ist Sieger → $S_A = \{ (A;A), (A;B;A), (B;A;A) \}$

Ereignis S_B - B ist Sieger → $S_B = \{ (A;B;B), (B;A;B), (B;B) \}$

Bsp. 2) Auf dem Trockenboden hängen in völliger Finsternis 10 weiße und 6 schwarze Strümpfe von ansonsten gleicher Art und Größe. Wie viele muss man abnehmen, um ganz sicher
a) 2 weiße b) 2 schwarze c) 2 weiße <u>oder</u> 2 schwarze d) 2 weiße <u>und</u> 2 schwarze
Strümpfe dabei zu haben?

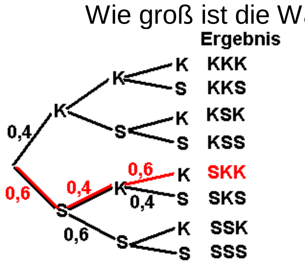
Lsg.: Betrachten des <u>ungünstigsten</u> Pfades
a) 6xS;2xW → 8 b) 10xW;2xS → 12 c) WSW,WSS,SWW,SWS → 3 d) analog b) → 12

Pfadregeln:

Pfad-Multiplikationsregel:	Die Wahrscheinlichkeit eines <u>Ergebnisses</u> eines mehrstufigen Zufallsexperimentes ist gleich dem <u>Produkt</u> der Wahrscheinlichkeiten längs des zum Ergebnis gehörenden Pfades.

Bsp. 1) $P(A;A) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25\%$, $P(A;B;A) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 12{,}5\%$

Bsp. 2) Wirft man eine Reißzwecke einer bestimmten Sorte, dann tritt bei jedem Wurf die Lage Kopf mit P(K)=0,4 und die Lage Seite mit P(S)=0,6 auf. Die Reißzwecke wird drei mal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ?



→ $P(SKK) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = \underline{\underline{0{,}096 = 9{,}6\%}}$

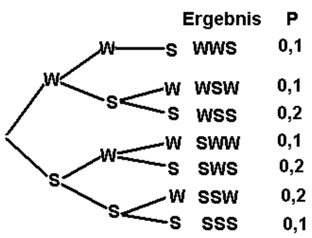
Pfad-Additionsregel:	Die Wahrscheinlichkeit eines <u>Ereignisses</u> eines mehrstufigen Zufallsexperimentes ist gleich der <u>Summe</u> der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

Bsp. 1) $P(\Omega) = 2 \cdot 25\% + 4 \cdot 12{,}5\% = 100\%$

Bsp. 2) a) Ereignis E – Genau 2 mal Lage Kopf → E = {KKS;KSK;SKK}
→ $P(E) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 \cdot 3 = \underline{\underline{0{,}288 = 28{,}8\%}}$
b) Ereignis F – Mindestens 2 mal Lage Seite → F={KSS;SKS;SSK;SSS}
→ $P(F) = 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}6^3 = \underline{\underline{0{,}648 = 64{,}8\%}}$

Bsp. 3) Eine Urne enthält drei schwarze (S) und zwei weiße (W) Kugeln. Es wird drei mal ohne Zurücklegen gezogen.
a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse an!
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei schwarze Kugeln gezogen werden?

a)

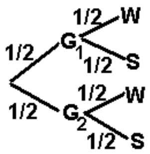
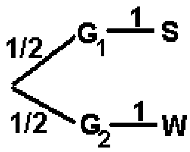
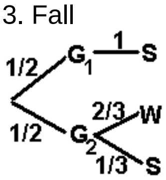
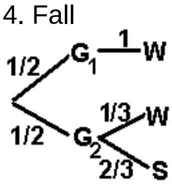


b) E={WSS;SWS;SSW} → $P(E) = \underline{\underline{0{,}6 = 60\%}}$

Anwendungen

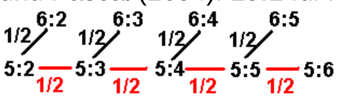
Bsp 1) Ein König ist der leeren Versprechungen seines Astrologen überdrüssig und beschließt, ihn möglichst zu beseitigen. Er möchte jedoch nicht als grausam gelten und gibt ihm daher eine letzte Chance. Er ruft den Astrologen zu sich und gibt ihm zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Dann spricht er: „Hier sind vier Kugeln. Diese sollst du auf zwei gleiche Gefäße verteilen. Es muss sich in jedem Gefäß mindestens eine Kugel befinden. Ich werde dann mit geschlossenen Augen ein Gefäß wählen und daraus eine Kugel ziehen. Ist sie weiß, so gehe deiner Wege. Ist sie schwarz, so bist du heute Abend ein toter Mann.“ Wie sind die Kugeln auf die Gefäße zu verteilen?

	G_1	G_2
1. Fall:	SW	SW
2. Fall:	SS	WW
3. Fall:	S	SWW
4. Fall:	W	SSW

1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
			
$\underline{\underline{P(W)=1/2}}$	$\underline{\underline{P(W)=1/2}}$	$\underline{\underline{P(W)=1/3}}$	$\underline{\underline{P(W)=2/3}}$ → bester Fall

Bsp. 2) Zwei Spieler A und B mit gleichen Gewinnchancen pro Partie spielen gegeneinander. Sieger ist derjenige, der zuerst 6 Partien gewonnen hat. Er erhält einen Geldbetrag. Sie müssen allerdings das Spiel abbrechen, als A bereits 5 und B 2 Partien gewonnen hat.
Wie ist der Geldbetrag gerecht zu verteilen?

→ Pacioli (1494): 5:2 für A (entsprechend Spielstand)
→ Cordano (1539): 4:1 für A (Wie viel noch zu gewinnen)
→ Fermat und Pascal (1654): **15:1** für A (math. richtig!)



A – A gewinnt bzw B – B gewinnt
→ P(B)=1/16 → P(A)=15/16

Bsp. 3) Bei einer Spielshow gilt es, das Auto zu gewinnen, welches sich hinter einer von drei verschlossenen Türen befindet. Hinter den beiden anderen Türen befindet sich jeweils eine Ziege. Der Spieler wählt eine Tür aber der Showmaster (weiß, wo sich das Auto befindet) öffnet eine der beiden anderen Türen, hinter der eine Ziege steht.
Der Kanditat darf sich neu entscheiden: Also auf die von ihm zunächst gewählte Tür oder auf die dritte Tür tippen. Wie soll er sich entscheiden?

Lsg.: Ereignis Ti – Auto befindet sich hinter Tür i
zu Beginn: 3 Türen → P(T1)=P(T2)=P(T3)=1/3 (gleich wahrscheinlich)
Spieler möchte z.B. Tür 2: → P(T2)=1/3 → $P(T1 \cup T3)=2/3$
Showmaster öffnet aber z.B. Tür 1: → P(T1)=0 → P(T3)=2/3
→ Kanditat sollte auf die dritte Tür tippen!